

# Komplexe Zahlenfolgen

und

## Komplexe Reihen

Datei Nr. 50040

Stand 12. November 2023

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK  
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

## Inhalt von 50040

<b>1</b>	<b>Komplexe Zahlenfolgen / Punktfolgen</b>	<b>4</b>
1.1	<b>Arithmetische Folgen,</b>	4
1.2	<b>Geometrische Folgen</b>	5
	Folge 1: $z(n) = 10 \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$	5
	Drehstreckung, <b>logarithmische Spirale</b>	6
	Konvergenzbeweis	8
	Partialsomme einer <b>geometrischen Reihe</b>	10
	Folge 2: $z_1 = 1$ und $q = \sqrt[12]{2} \cdot \text{cis}(30^\circ)$	12
	Folge 3: $z_n := \left(\frac{3}{4} \cdot i\right)^n, n \in \mathbb{N}_0$	13
	Folge 4: $z_1 = 4$ und $z_{n+1} = z_n \cdot q$ mit $q = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \text{cis}(30^\circ)$	15
	Folge 5: $f(z) = \left(\frac{1}{2} + i\right) \cdot z$	17
	Folge 6: $z_1 = 4$ und $z_n = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \cdot z_{n-1}$	19
	Folge 7: $z_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^n, n \in \mathbb{N}$	22
<b>1.3 Zyklische Folgen</b>		
	Folge 11: $z_n = 2i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$	23
	Folge 12a: $z_0 = 1$ und $z_k = z_{k-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$	25
	Folge 12b: $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)^{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$	27
	Folge 13: $z_{n+1} = z_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ mit $z_1 = 1$	29
	Folge 14: $z_n = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right] \cdot z_n + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot i\right]$ mit $z_1 = 1$	31
	Folge 15: $f(z) = z \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1-i)$ $z_1 = 2, z_{n+1} = f(z_n)$	33
	Folge 16: $z_1 = 1$ und $z_{n+1} = z_n \cdot \left(\frac{1}{2} + k \cdot i\right)$	35

## 2 Konvergenzuntersuchungen mit $\varepsilon$ 37

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad b_n = \sqrt[n]{a} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad c_n = \sqrt[n]{n} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$a_n = 4 + \frac{2i^n}{n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)^n; \quad a_n = \left(\frac{3n+1}{n}\right) \cdot i^n$$

## 3 Konvergenzsätze 42

Häufungspunkt, limes sup und limes inf.

Satz von Bolzano-Weierstraß, Konvergenzkriterium von Cauchy.

## 4 Übungsaufgaben 44

4.1 Untersuchen Sie die jeweilige komplexe Zahlenfolge auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

(a)  $z_n = i^n + (-1)^n$       (b)  $z_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$

4.2 Berechne den Grenzwert der Folgen 45

(a)  $z_n = 4 + \frac{i^n}{n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)^n$       (b)  $z_n = \frac{4n^2 + 2in - 3i}{2in^2 + 3n + 2}$

(c)  $z_n = 3 + \frac{2i^n}{n} + \left(\frac{1}{5} + \frac{i}{4}\right)^n$

4.3 Welche Häufungspunkte hat die Folge  $a_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right) \cdot i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  46

4.4 Berechne die Summen der folgenden geometrischen Folgen (Reihen) 47

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)^k \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4-i}{5}\right)^k \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4i}\right)^{k+2} \quad \sum_{k=0}^{60} i^k$$